



INSTITUTIONEN FÖR PEDAGOGIK OCH SPECIALPEDAGOGIK

BRÅKENS ANVÄNDNINGSSOMRÅDE I MATEMATIK OCH I ANDRA GRUNDSKOLEÄMNINGEN

En kvalitativ analys av bråkberäkning ur ett lärarperspektiv

Eugenia Eriksson

Uppsats/Examensarbete:	15 hp
Program och/eller kurs:	LAU925:2
Nivå:	Grundnivå
Termin/år:	Ht/2015
Handledare:	Staffan Stukát
Examinator:	Hannah Åhman
Rapport nr:	HT15 IPS LAU925:6

Abstract

Uppsats/Examensarbete: 15 hp
Program och/eller kurs: LUA925:2
Nivå: Grundnivå
Termin/år: Ht/2015
Handledare: Staffan Stukát
Examinator: Hannah Åhman
Rapport nr: HT15 IPS LAU925:6
Nyckelord: Bråkets användningsområde, bråksvårigheter i matematik, bråket i andra grundskoleämnen och i vardagen

Syfte: Syftet med denna undersökning är att ta reda på varför beräkning med bråk orsakar svårigheter för elever på högstadiet. Syftet är också att undersöka vilka problem uppstår i matematik, i andra skolämnen och i vardagssituationer när eleverna använder bråk.

Teori: Bråket spelar en stor roll för grundskoleelever i bildningen av begreppsmodeller. Modellerna stödjer förståelsen för andra moment i matematik. Samtidigt bråket har en stor betydelse som förkunskap i vidare studier inom följande område: algebra, funktioner och sannolikhet. Jag har använt följande modeller för att beskriva tal i bråkform: en del av helhet, andel, division, proportion, förhållande.

Metod: Jag har genomfört intervjuer med fem lärare i matematik från högstadiet. Vidare har jag innehållsanalyserat de transkriberade intervjuerna och studerat tidigare forskningen.

Resultat: Resultatet i studien visar hur undervisar och arbetar de fem pedagogerna med bråkundervisningen. De anser att eleverna har en viss förförståelse för bråk samtidigt är medvetna att svårigheter finns vid begreppsbildningen. Pedagogerna arbetar med utvalda metoder för att underlätta kunskapsinhämtandet och gör uppmärksamma eleverna att dessa grundläggande kunskaper är användbara i vidare studier och i vardagen.

Innehållsförteckning

1. Inledning	3
2. Syfte och frågeställningar	4
3. Litteraturgenomgång	5
3.1 Vad säger styrdokumentet och forskningen om bråkundervisningen?	5
3.1.1 Hur skall undervisningen bedrivas enligt kursplanen Lgr11	5
3.1.2 Läromedelsanalys	6
3.1.3 Aktuella forskningsmetoder som används i bråkräkningen	7
3.2 Bråkbegreppen i matematik	9
3.2.1. Definition och begreppet bråk	9
3.2.2 Bråktalens grunder	11
3.2.3 Bråk som proportion och förhållande	12
3.2.4 Bråk i geometri	12
3.2.5 Bråk i algebra	13
3.3 Bråk i andra grundskoleämnena	15
3.3.1 Bråk i hem- och konsumentkunskap och i slöjd	15
3.3.2 Bråk i musik	16
3.3.3 Bråk i ekonomi och samhällskunskap	17
4. Teoretiska utgångspunkter	19
5. Metod	21
5.1 Innehållsanalys	21
5.2 Semistrukturerade intervjuer	21
5.3 Genomförande	22
5.3.1 Urval	22
5.3.2 Intervjuer	22
5.3.3 Kategoriindelning	22
5.4 Kvalitetskriterierna	23
5.5 Etiska överväganden	25
6. Resultat och analys	27
6.1 Resultat	27
6.2 Analys	31
7. Diskussion och slutsats	34
7.1 Metoddiskussion	34
7.2 Resultatdiskussion	34
7.3 Slutsats och fortsatt forskning	35

Referenslista.....	37
Bilaga1 Intervjuguide	

1. Inledning

Matematik är grundskolans näst största ämne. Jag begränsar matematikens område och analyserar "bråkbegreppet" i matematiken, i andra grundskoleämnena och i vardagen. Bråkens roll i samhället har övertagits av decimaltalen. Enligt Löwing och Kilborn (2002) har undervisningen av bråkräkningen i grundskolan blivit allt mindre. Bråket har en stor roll vad gäller att beskriva andelar och är samtidigt en förkunskap för att lära sig algebra, sannolikhet och andra delar inom matematik.

Bråk kan vara svårt att undervisa och att lära sig, men svårigheter kan övervinnas. Marton och Booths (2000) nämner Menons paradox som säger bland annat att "man inte kan lära sig något utan förståelse." När matematiklärarna planerar och bestämmer målet och innebörden i bråkundervisningen måste de fundera över vilka förkunskaper som krävs och vilka begrepp som behövs. Rationella tal kan tolkas på flera olika sätt, vilka ofta sammanfattas som del av helhet, mätning, kvot, division, proportion och förhållande. Redan i mellanstadiet introduceras bråk som del av en helhet. Eleverna är vana att dela på en chokladkaka, en pizza och godiset. Svårigheten uppstår i årskurs 7 när elever behöver utföra beräkningar med bråk som har olika andelar. Ett år senare i årskurs 8 i kapitlet procent svårigheten återkommer när eleverna behöver relatera till begreppet det hela. I årskurs 9 i kapitlet förhållande och proportion byggs vidare modellerna. Enligt kursplanen finns en progression i bråkets begreppsmodeller. Kunskapsutvecklingen visar fallgropar. Idén för denna uppsats föddes när elever med stark teoretisk bakgrund inte har klarat av att använda bråkbegreppet i det slutliga nationella proven i årskurs 9 vårterminen 2015.

Elever som saknar förkunskaper kommer att få svårigheter i att klara bråkrelaterade uppgifter på grundskolenivå och senare att klara av matematiken vid teoretiska studier samt vid yrkesförberedande studier i motsvarande yrken där de behöver använda bråkbegreppen. Jag kommer att undersöka vilka följder i kunskapsutvecklingen får elever ifall kunskap om bråkräkning är bristfällig och hur påverkar eleverna senare vid vidare studier eller för de som inte kommer att studera vidare, hur det kommer att påverka vardagssituationerna.

Matematikundervisningen ofta är upplagd så att man behöver goda kunskaper inom tidigare områden för att få förståelse för pågående moment. Enligt Kilborn och Löwing (2002) kan elever som har problem med bråkräkningens baskunskaper få problem senare med algebran. Det är även viktigt för framtida forskningen att se vilka följder bristen på kunskap inom bråkräkning kan få så att det kan lägga en grund för vad det behövs arbeta mer med.

Jag vill fördjupa mig i hur erfarna lärare bygger upp och strukturerar sin undervisning om bråk beroende på kunskapsmålen. Jag är också intresserad av hur undervisande lärare i matematik kontinuerligt söker efter varierade arbetssätt och arbetsformer för att göra kunskap tillgänglig för alla elever. Därför kommer jag att göra en kvalitativ undersökning bland lärarkollegor på grundskolan i senare år.

I min uppsats redovisar jag resultatet som jag fått från de intervjuade lärarnas erfarenheter och föreslår en fråga för vidare forskning. Målet med uppsatsen är att göra bråkets användningsområde lättare för både lärare och elever.

2. Syfte och frågeställningar

Syftet med uppsatsen är att belysa:

Varför är beräkningen med bråk svårt för elever på högstadiet, vilka problem uppstår i matematik, i andra skolämnen och i vardagssituationer när eleverna använder bråk.

Frågeställningar:

- I. Vilka metoder använder erfarna lärare att undervisa i bråk?
- II. Hur skall lärarna bygga begreppsmodellen bråk under högstadiet?
- III. Hur påverkar svårigheterna i bråkförståelse framtida studier?
- IV. Vilka effekter har bråksvårigheter i andra grundskoleämne och vardagen?
- V. Stämmer mina tolkningar av de intervjuade lärarnas beskrivningar överens med de svårigheter som forskningen i ämnet beskriver?

Min intention har varit att koppla resultatet från min studie till styrdokument och forskning, för att se hur man kan bedriva en god bråkundervisning som leder till ökad förståelse.

3. Litteraturgenomgång

Bakgrunden inleds med att beskriva innehållet i den aktuella kursplanen i matematik för grundskolan, sedan förklaras orsaken och förekomsten av bråk och varför uppkommer svårigheter att arbeta med bråk för elever i matematik. Därefter begränsar mig i några skolämnen och i vardagsnära situationer där vi använder bråk om hur vi arbetar i skolan för att bemöta eleverna med olika förkunskaper. Jag fortsätter med att beskriva kopplingen mellan bråkräkning och problemlösningsförmåga hos elever. Sist beskriver jag den teoretiska anknyttningen som kommer att användas när man diskuterar och analyserar resultatet. Mitt val av litteratur är tänkt att ge en teoretisk ram för analysen av frågan varför beräkningen med bråk är svåra för elever. Litteraturgenomgångens roll är att komma åt vad som kan vara kritisk för lärande, för att därigenom förbättra undervisningen så att eleverna lär sig. Det som jag undersökte är *vad* och *hur* eleverna lär sig, vilka metoder och modeller använder de intervjuade lärarna i sin egen praxis för att nå eleverna. Fokuset ligger i elevernas lärande som grundar på relationen lärande-undervisning.

3.1 Vad säger styrdokumentet och forskningen om bråkundervisningen?

3.1.1 Hur skall undervisningen bedrivas enligt kursplanen Lgr11

Syftet med den matematik som idag lärs ut i skolan är att förbereda en del elever för deras studier för vidare studier och för de elever som inte önskar studera vidare fortsätter deras liv genom att arbeta (Löwing & Kilborn, 2002).

Enligt läroplanen (Lgr11) kunskaper i matematik är viktiga för att eleverna ska kunna fatta bra beslut i vardagen. Lärarna måste anpassa undervisningen för att lära ut kunskaper på ett sätt som gör det möjligt för alla elever att tillämpa dessa kunskaper i olika situationer. I Skolverkets kursplan står tolkningen för ämnets syfte och centrala innehåll:

”Genom undervisningen ska eleverna även ges möjligheten att reflektera över matematikens betydelse, användning och begränsning i vardagslivet, i andra skolämnen och under historiska skeenden och därigenom kunna se matematikens sammanhang och relevans.” (Skolverket 2011 s. 62).

Matematikens innehåll och riktningar har varierat i olika kursplaner genom tiden. I kursplanen Lgr69 var kraven i bråkräkningen större än i LGr80 (Runesson, 1999). I mitten av 90-talet skolans styrning ändrades från normrelaterad till målrelaterad och tolkningen av kraven på undervisningen överläts åt lärarna. Numera i Lgr11 står på ett tydligare sätt att lärarna skall använda matematik i olika sammanhang samt inom olika ämnesområden (Skolverket, 2011). Undervisningen ska syfta till att eleverna får möjlighet att reflektera över bråkets betydelse, användning och begränsning i vardagslivet, samt kunna se samband i andra skolämnen.

Enligt läroplanen Lgr11 kunskaper i matematik är viktiga för att eleverna ska kunna fatta bra beslut i vardagen. Lgr11 beskriver vilka **förmågor skall elever utveckla i matematik**:

- välja och använda lämpliga matematiska metoder för att göra beräkningar och lösa rutinuppgifter
- använda och analysera matematiska begrepp och samband mellan begrepp
- formulera och lösa problem samt värdera valda strategier och metoder, föra och följa matematiska resonemang
- använda matematikens uttrycksformer för att samtala om, argumentera och redogöra för beräkningar och slutsatser. (Skolverket 2011 s. 63).

Dessa förmågor betygsätts av varje lärare i grundskolan.

I kursplanen (Skolverket, 2011) står tolkningen för ämnets syfte och centrala innehållet för **taluppfattning/bråk** i årskurs 7-9 och beskrivs på följande sätt:

- ”Centrala metoder för beräkningar med tal i bråk- och decimalform vid överslagsräkning, huvudräkning samt vid beräkningar med skriftliga metoder och digital teknik.
- Rimlighetsbedömning vid uppskattningar och beräkningar i vardagliga och matematiska situationer och inom andra ämnesområden.
- Strategier för problemlösning i vardagliga situationer och inom olika ämnesområden samt värdering av valda strategier och metoder.”(Skolverket 2011 s. 66-67).

Varje skola och varje lärare planerar mål och delmål i sin undervisning och gör ett detaljerat begrepp utveckling för alla elever. Oerfarenhet kan innebära problem på sikt (Brunosson, 2010). Bråkkunskaper är viktiga att grundskoleelever ska lära sig att fatta bra beslut i vardagsituationer och för att göra bra val som konsument med hänsyn till hälsa, ekonomi och miljö (Skolverket, 2010). Bråk är nödvändig förutsättning för att arbeta med algebraiska operationer för elever som studerar vidare i gymnasiet.

3.1.2 Läromedelsanalys

Olika skolor använder olika läromedel som beskrivs och analyseras både erfarenhetsmässigt samt med hjälp av tidigare forskning och litteratur. I de vanliga läromedlen i matematik eleverna får träna på liknande tal med en ökad svårighetsgrad under samma kapitel. Eleverna tränar på samma slags uppgifter och då sker bara en reproduktion av uppgifter i stället för att utveckla en förmåga hos elever att hantera nya problem.

Min erfarenhet av läromedelsanalys baseras på två olika läroboksserier aktuella i undervisningen vid två högstadieskolor i Västra Götaland. Dessa två läroboksserier är följande: Matte Direkt årskurs 7-9 och Matematikboken XYZ. Jag har analyserat de relevanta avsnitten ur instrumentella och relationella aspekter och tycker att det inte alltid motsvarar kunskapskraven. Det saknas utmaningsuppgifter och bevissatser med vilka vissa teorem borde bevisas.

En bra strategi skulle vara att lärare och läromedelsförfattare försöker analysera dessa problem och försöka förstå hur de uppstår och söka en lösning på dem. Det ämnesinnehåll man försummar att behandla under ett skolår dyker upp ett par år senare och vållar betydligt allvarligare problem. Detta intryck växer sig starkare hos presentationen av division av bråk

där inte en enda konkretiserande illustration finns i någon av läroböckerna. Här tycker jag definitivt att läroböckerna arbetar ur en mer instrumentell - än ur en relationell synvinkel.

Löwing (2008) beskriver också att en anledning till det är att flera läromedelsförfattare "hoppas över" bråk i läromedlen vilket leder till att eleverna inte undervisas om denna form av tal. Även Kilborn (2014) beskriver denna utveckling av läromedlen. Han anser att detta inte är enhetligt med styrdokumentet där en del av syftet för matematikundervisningen och beskrivs i styrdokumentet på följande sätt:

"Genom undervisning ska eleverna ges förutsättningar att utveckla förtrogenhet med grundläggande matematiska begrepp och metoder och dess användbarhet".
(Skolverket, 2011, s. 62).

Det som saknas hos de mest använda läroboksserierna är en presentation av alternativa sätt att räkna och tänka, som till exempel i Löwings modell. Den kortfattade presentationen av avsnitten, frånvaron av alternativa lösningsmetoder, den vaga kopplingen mellan de olika uppgiftstyperna och övningsuppgifternas karaktär ger ett intryck av att proceduren går före förståelsen.

3.1.3 Aktuella forskningsmetoder som används i bråkräkningen

Madeleine Löwing en av pionjärerna i ämnet matematik-didaktik förklarar vad det är som ingår i ett lärarperspektiv. Rapporten "Ämnesdidaktisk teori för matematik undervisning-ämneskunskapers relation till individ och omvärlden" ger förklaringar till varför elever har problem med att förstå olika typer av ämnesinnehåll. Hon sammanfattar lärarperspektivet på följande sätt:

"Läraren är arbetsledare för en grupp individer som har olika förutsättningar för att studera matematik. En del elever är intresserade och har goda förkunskaper, andra har låg motivation och sämre förkunskaper. Olika elever har också olika erfarenheter och olika språkliga förmågor. Som lärare har man ansvar för att möta alla dessa elevers behov. Läraren måste i förväg känna till vilka möjligheter som finns att utgående från elevers olika förutsättningar ge olika förklaringar till den ställda frågan, veta hur olika elever brukar tänka och vilka olika sätt det finns att förklara på. Det som för en lärare verkar vara enkelt och självklart kan för en elev vara helt obegripligt." (2002, s.11)

Hon föreslår att underlag för ett sådant handlande skall finnas i en "Ämnesdidaktisk teori för matematik undervisning." I ett flertal forskningsstudier Runesson (1999) har visat på variationsteorins styrka att förstå och planera lärande. Hon menar att lärarna måste skapa en variation av arbetssätt för att utveckla förståelse för tillämpning och användning av matematiska kunskaper. Genom en anpassad undervisning lär de ut kunskaper i matematik på ett sätt som gör det möjligt för eleverna att tillämpa sina kunskaper i vardagliga situationer. Kunskaper som elever utvecklar påverkas av de kunskaper som läraren i sin undervisning betonar samt vilka kunskaper läraren vill att elever ska få med sig.

Undervisningen i bråk sker enligt kurslitteraturen, med hjälp av externt material och lärarnas egen antagande kring effektiv utläring och elevernas förståelse för bråk. Löwing (2008)

föreslår att inte arbeta med bråk bara procedurellt, utan att arbeta på ett sätt med mål för att eleverna ska förstå de matematiska operationernas verkliga innebörd.

Löwing och Kilborn (2002) har under några år gjort systematiska studier med hjälp av enkla huvudräkningstest kring bråk- och decimaltal för att reda ut de problem elever har med just detta. För att förstå decimaltecknets betydelse och placering kan man ta hjälp av grundläggande bråkräkning då decimaltal är ett enklare sätt att skriva bråk. Även om decimaltal tar sin utgångspunkt i bråk finns det dock en väsentlig skillnad, bråk kan exempelvis användas för att beskriva andelar medan det decimaltal man får fram endast kan tolkas som tal på tallinjen.

Begränsning

Matematikens närvaro i olika ämne är tydlig men jag begränsar mig vid bråkets användning inom följande ämne: förutom matematik också fysik, kemi, hemkunskap, musik och i samhälleliga frågor samt ekonomi. Bråkräkningen kommer att vara användbar för elever som fortsätter att studera vidare på gymnasieskola och för de elever som inte studerar vidare kommer att vara viktig att använda beräkningen i vardagssituationer.

I dag blir allt mer ett viktigt arbetssätt en ämnesövergripande undervisning när två eller flera ämnen arbetar tillsammans. Det är viktigt att kunskap som krävs i samhället ryms i flera skolämnen. Bråk används dagligen i hemkunskap när vi till exempel räknar om ett recept, i musiken som är ett kontinuerligt flöde av symboler som kan beskrivas med bråk, i slöjd, bild, teknik, statistik och media.

Men frågan är hur? Erfarenhet tyder på att när ett par lärare bestämt sig för samverkan, blir resultatet bäst om denna byggs ut i relativt små steg. Hittills lärarna har arbetat med varje ämne för sig. Samverkan eller tematiskt arbete borde hjälpa eleverna att använda sina kunskaper i geometri, i slöjd, tolka tabeller och diagram i samhällskunskap, samt att använda bråkräkningen i sannolikhet, hemkunskap eller musik, ekonomi, hälsa det vill säga i en mer realistisk vardagssituation.

Dessa användningsområden av bråk ger eleverna ett tydligt intresse och utveckling i problemlösningsförmågan. Kopplingen till andra ämne ger möjlighet för elever att kunna uppfatta och tolka information som finns i massmedia samt att kunna välja och ta de bästa besluten i ekonomi- och samhällsfrågor.

De pedagogiska implikationerna kan vara att skapa en bättre förståelse och användning av sambandet mellan bråk och vardag, samt förtydliga för alla berörda (både lärare och elever) att bråkräkningen är en viktig förkunskap till vidare studier.

Många lärare i matematik fokuserar på användning av variationsteori inom ämnen. På grund av att bråkräkningen förekommer flera skolämnen krävs att lärarna ska använda en variation av arbetsformer och modeller. Man kan variera exemplet, men hålla metoden konstant, eller man kan hålla exemplet konstant och variera metoden. Runesson och Kullberg (i tryck) menar att när man undervisar håller man exemplet konstant och önskar att eleverna skall lära sig olika metoder. Vidare författarna menar att: "when the method varies and the example remains invariant, it is possible to learn how to solve the same example with different methods." (s. 11). Det betyder att lärarna skall bli mer professionella och mer aktiva inom

forskning och därmed använda en varierad metodval.

3.2 Bråkbegreppen i matematik

Många lärare undviker tal i bråkform och lär eleverna att göra om talen till decimalform. Detta fungerar i vissa lätt hanterade bråk, men i de flesta fall behöver eleverna använda miniräknare. Det blir konsekvenser både vad det gäller huvudräkning och räkning med algebraiska operationer. Löwing och Kilborn (2002) menar att lärarna skall undervisa bråkbegreppet med konkretisering från vardagslivet och ska alltid visa skillnader mellan andel och delen av ett antal.

”Bråkräkning inte är så krångligt om det byggs upp på rätt sätt, det vill säga på tankeformer som är konkreta och vardagsförankrade för eleverna. Det är även viktigt att tänka på att bråk kan benämnas på flera olika sätt. Två av dessa är som del av hel och som del av ett antal. För att kunna undervisa om bråk på ett framgångsrikt sätt bör läraren vara medveten om dessa olika aspekter.” Löwing och Kilborn (2002, s. 354).

Författarna föreslår att lärarna ska presentera dessa två aspekter på ett tydligt sätt för elever för att underlätta en bra förståelse av bråkbegreppet. Huvudproblemet med bråkbegreppet för elever är att de rationella talen är *tal*. Ett större problem med att förstå bråkbegreppet är att bråktal kan vara mängder, skalor eller förhållanden och dessa olika aspekter är integrerade i begreppet rationella tal. Det är viktigt att eleverna utvecklar en rik begreppslig förståelse kring de olika tolkningarna av uppgifter för att kunna gå vidare i utvecklingen av förståelsen av bråkbegreppen (Runneson, 1999).

3.2.1. Definition och begreppet bråk

Definition av bråk som tal:

”I bråkform har man ett tal i som är skrivet som a/b där både a och b är heltal. I bråkform kallas a täljare, b nämnare och strecket $(/)$ bråkstreck. Exempel på tal i bråkform är $1/2$, $5/8$, $16/40$ och $36/100$. När man skriver $5/8$ betyder det ”5 dividerat med 8” eller ”fem åttondelar.”(NE, 2015).

Ahlberg (1995) anser att bråkbegreppet ska vara en baskunskap för alla och att eleverna på ett konkret och systematiskt sätt får tillägna sig god förståelse för begreppet, hur bråk skrivs, vad de har för storlek samt hur bråk kan storleks ordnas. Författaren fortsätter beskriva hur eleverna kan lära sig bråkens betydelse genom att de får kunskaper om att nämnaren benämner en enhet och att täljaren anger antalet.

Allmänt exempel:

a) Bråket $\frac{a}{b}$ är det unikt tal som multiplicerad med b ger resultatet a

Konkret exempel:

$\frac{2}{7}$ det är unika lösningen till ekvationen $7 \cdot x = 2$ vilket ger resultaten $x = \frac{2}{7}$ det vill säga $a = 2$ $b = 7$ och $b \neq 0$. I ett bråk nämnaren får inte vara noll därför då definitionen av bråk inte är giltig, ett heltal går inte att dela med noll. Exemplet visar hur viktig det är bråket för att lösa algebraiska operationer.

En vanlig metod att se begreppet det hela är att förlänga bråket d.v.s. multiplicera bråket med samma tal i både nämnaren och täljaren:

$\frac{3}{3}$ med $\frac{2}{7}$ då får vi $\frac{6}{21}$ och då får man en multipel av bråken.

Om vi utför direkt den matematiska operationen $\frac{2}{7}$ då blir det en division $2:7 = 0,28$. Har eleverna svårigheter med multiplikationstabellen då kan de inte använda metoden och begreppet bråk kommer att vara ett hinder. En missuppfattning som rör bråk är att barn inte förstår att delarna måste vara lika stora, till exempel kan en elev säga att de vill ha den största halvan av pizzan.

När elever inledningsvis försöker förstå bråk är det vanligt att läraren har förklarat på följande sätt: nämnaren talar om hur många delar det hela har delats i och täljaren talar om hur många av dessa delar man ska ta, räkna eller måla. Denna förklaring fungerar tämligen bra för bråk mellan 0 och 1 i vissa sammanhang, men det blir svårare för bråk större än 1. Om jag föreslår följande exempel: sju tredjedelar $\frac{7}{3}$ det betyder 3 talar om namnet eller storleken på delarna, tredjedelar, och 7 talar om att vi har 7 sådan tredjedelar (eller två hela och en tredjedel $2\frac{1}{3}$). Den här förklaringen kan hjälpa eleverna till ett bättre språkbruk när de talar om bråk (Kilborn, 1990).

b) Bråk som del av en hel

Klassiska exemplet för förklaringen en del av det hela är att dela upp en pizza eller en tårta i ett antal delar. Vi delar pizzan i 5 delar och tar 3 delar av det hela. Spelet kan fortsätta med ett antal bråk.



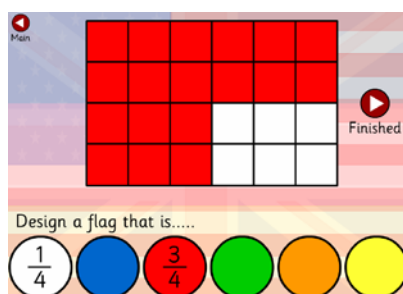
¹Fig. 1 Ekvivalenta bråk

¹ <http://www.freeweb.hu/szenteskep/matek/programok/tortek>

Ett vanligt fel som rör bråk är att elever inte förstår att delarna måste vara lika stora, till exempel kan en elev säga att de vill ha den största halvan av pizzan. När till exempel tredjedelar introduceras beskriver McIntosh (2008) att eleverna inte förstår att delarna ska vara lika stora, utan de tror att de kan få en tredjedel genom att dela helheten på mitten och sedan dela ena halvan i två. Detta borde då bli tredjedelar eftersom helheten är delad i tre delar. Flera svårigheter och missuppfattningar kan undvikas genom att lärare använder sig av exempel som eleverna kan stöta på i vardagen, exempelvis kan 50/100 visas på annat sätt än $\frac{1}{2}$ tårta då en tårta sällan delas i 100 bitar (McIntosh, 2008).

c) Bråk som del av ett antal det är ett annat begrepp som orsakar svårigheter för elever.

Exempel: $\frac{1}{4}$ en fjärdedel av 24 är lika med 6 medan $\frac{3}{4}$ trefjärdedelar av 24 blir 18 det vill säga tre gånger så mycket. Det är viktigt att vägleda eleverna för att göra en uppfattning om hur man räknar bråk som en del av det hela. Detta går att genomföra med många didaktiska bilder och uppgifter. Det finns moderna och enkla spel att använda.



² Fig. 2 Bråk som en del av ett antal

Det interaktiva arbetsmaterialet är viktig redskap för lärande men behöver kompletteras med lärarens undervisning. Den pedagogiska idén bakom en matematik spel är att eleven har möjlighet att resonera och diskutera sig fram till förståelse av de matematiska begreppen och att man kan tänka på många olika sätt då man löser ett bråk/matematik uppgift.

3.2.2 Bråktalens grunder

Inom matematiken används bråk främst för att uttrycka storleken av olika andelar. Enligt McIntosh (2008) det första mötet med bråk bör vara uppdelning i lika stora delar. Det är viktigt att uppmärksamma elever att bråket $\frac{2}{5}$ har helt olika innebörd och svarar mot två helt olika begrepp.

Det första begreppet är att lära eleverna att skilja mellan tecknet för division två delad med fem (2:5) som en räkneoperation och ett bråkstreck $\frac{2}{5}$ det vill säga ett tal i bråkform ($\frac{1}{5} + \frac{1}{5}$).

Det andra begreppet är att $\frac{2}{5} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5}$ det vill säga 2 är mätetal och $\frac{1}{5}$ är enhet. Eleverna behöver förstå divisionen av bråk på två olika sätt: för det första bråk delat med ett naturligt

² <http://www.oswego.org/ocsd-web/games/fractionflags/fractionflags.html>

tal det vill säga $\frac{4}{5}$ delat med 2 och för det andra bråk delat med ett annat bråk det vill säga $\frac{4}{5}$ delat med $\frac{1}{6}$.

Eleverna ofta fastnar vid gamla rutiner från tidigare årskurser och är osäkra på att prova nya vägar. Det är alltid samma problem som uppstår när man adderar eller subtraherar två bråktal med olika nämnare. De behöver göra om först bråken liknämninga och sedan utföra matematiska operationen. Svårigheten uppstår i att hitta det minsta gemensamma nämnaren som är minsta talet som delar båda nämnare.

En annan svårighet för elever är att tolka bråkets olika ansikten. Bråktal kan uppfattas på olika sätt. Enligt Kilborn (1990) bråket har många ”ansikten”:

”Bråket som del av ett antal (del av helhet, del av antal). Här är bråket en del av en känd helhet. Exempelvis $\frac{1}{2}$ av den hela pizzan, $\frac{1}{4}$ av en hel timme 1h och bråket som ett förhållande, en relation eller en proportion.” (s. 46).

3.2.3 Bråk som proportion och förhållande

Proportion betyder lika förhållande. De storheter, som är i samma förhållande, sägs vara proportionella. Skalan, används i samband med kartor och ritningar, är förhållandet mellan bildens och det avbildades dimensioner. Nedan följer två exempel som är två typiska exempel på ett fel tolkning: den första som vållar svårigheter är ritning av kartan i skalan sjutiondelar $\frac{7}{10}$ som anger en proportion och inte ett tal. Eleverna ska förstå att varje detalj på ritningen är $\frac{7}{10}$ delar av motsvarande detalj i verkligheten. Sjutiondelar $\frac{7}{10}$ ska inte uttryckas som summan av $\frac{2}{10} + \frac{5}{10}$ delar.

Det andra exemplet på svårighet är om man ska fördela 700 kronor i förhållande 2 till 5, så blir inte delarna $\frac{2}{5}$ av 700 kronor respektive $\frac{3}{5}$ delar av 700 kronor utan i stället $\frac{2}{7}$ av 700 kronor och $\frac{5}{7}$ delar av 700 kronor (Löwing, 2008). Det är viktigt att stödja utvecklingen av proportionellt tänkande och bråk är betydelsefullt i kommande matematikstudier inte minst inom algebra och sannolikhet.

3.2.4 Bråk i geometri

Inom geometri det finns olika faser av inlärningsprocessen. Den ena är upptäckarfasen och den andra en verifieringsfasen. I den första fasen eleverna går genom upptäcktsresande i det matematiska landskapet. Här kan vi båda lärarna och elever använda alla våra sinnen, variera former, och leta efter förklaringar för olika begrepp.

Meningen med den här fasen är att elever ska finna nya samband, fördjupa sin egen förståelse och upptäcka kopplingar som de inte har lyckats med tidigare. För att arbeta med den här fasen har lärarna ett utmärkt hjälpmedel som till exempel datorprogrammet GeoGebra och den interaktiva skrivtavlan samt didaktiskt laborativ material. Programmet fungerar bra i klassrummet och presenterar ett effektivt resultat. När eleverna arbetar laborativt i klassrummet och med programmet GeoGebra utnyttjar man olika representationsformer och

olika uttryck. I arbetet använder man olika metoder och arbetsformer som grupparbete, temaarbete, laborationer med mera, för att eleverna skall kunna upptäcka nya samband och begrepp.

Ett exempel som presenterar svårigheter för elever är arean och areaenheter för en rektangel som betecknas med (A) bredden (b) och antalet rutor längs höjden (h) blir formeln för arean: $A = b \cdot h$ (bråktal som areor). Om man räknar heltalsarean beräknas arean av en rektangel genom att räkna med den antagna bredden 1 meter och höjden 1 meter då blir rutans area 1 m^2 och kallas area enheter. Om vi delar en areaenhet i tre lika stora delar så har varje del av arean en tredjedels $1/3$ areaenhet och två delar har tvåtredjedelars ($2/3$) areaenheter. Ett annat exempel är bråktal som areor av cirkelar genom att ladda ner Geogebra och dela ut arbetsblad samt visa på den interaktiva tavlan att arean för cirkeln är $A = \pi r^2$. I verifieringsfasen eleverna visar att de har förstått varför olika begrepp hör ihop och samtidigt breddar deras förmåga att kommunicera matematik.

Målet med matematikundervisningen är att eleverna skall lära sig förstå och använda ett antal matematiska begrepp och modeller. Denna begreppsbyggnad går från det enkla vardagsproblemet till mer komplicerad abstrakt matematik. Enligt Skolverket (2011) matematiken beskrivs i ämnesplanen för grundskolan på följande sätt: "Kunskaper i matematik ger människor förutsättningar att fatta välgrundade beslut i vardagslivets många valsituationer och ökar möjligheterna att delta i samhällets beslutsprocesser." (s. 62).

Johansson och Kilborn (1986) menar att det behövs en speciell teori för hur elever kan bygga upp ett matematiskt kunskapsförråd. Det didaktiska ämnesteorin i matematik enligt Kilborn (1990) bygger dels på hur olika begrepp utvecklats genom tiden, dels på forskning om hur olika elever uppfattar olika begrepp.

I en annan ämnesdidaktisk teori Marton och Booth (2000) beskriver lärandet som går framåt från en förståelse av helheten och dess beståndsdelar. Författarna menar att lärandet inte framskrider från delar till helheter utan från helheter till helheter (s. 41).

Man kan tolka detta med att eleverna löser matematiska problem av en viss typ på olika nivåer och med olika djup beroende på vilka begrepp de har i deras kunskapsförråd. Processen fortgår under hela skoltiden. De elever som inte kan använda och gå emellan olika modeller och material kommer att ha svårigheter vid vidare studier.

3.2.5 Bråk i algebra

Algebra är den delen av matematiken i vilken bokstäver och allmänna symboler används för att representera tal och kvantitet i formler och ekvationer. Bråkräkningen är grund för en rad algebraiska operationer. Algebraiska förenklingar och enkla bevis kan bli viktiga baskunskaper för dem som ska studera vidare på gymnasieskolan.

Exempel:

$$\text{a) } \frac{3}{5} = \frac{x}{100} \rightarrow x = \frac{3 \cdot 100}{5} \rightarrow x = 60$$

$$\text{b) } \frac{x^2-1}{x+1} = \frac{(x+1)(x-1)}{x+1} \text{ förkortas till } (x-1)$$

Det här handlar om att utveckla kunskaper för att kunna tolka matematiska situationer samt formulera och beskriva dessa med hjälp av matematikens uttrycksformer. Genom dessa kunskaper eleverna får möjligheter att förstå undervisningen i gymnasieskolan. På så sätt underlättar vi för eleverna att förstå arbetet med gränsvärden och derivata i gymnasieskolan.


De regler och metoder som gäller för bråkräkning i aritmetik gäller även i arbetet med algebra. Bråkräkningen fungerar som en konkretisering av stora delar av algebran. Förlängning och förkortning av algebraiska uttryck bygger på att man har förstått förlängning av motsvarande bråk. Dessa elever kommer att ha svårigheter med att lösa ekvationer med rötter i bråkform, med att förkorta uttryck som bråk i första eller andragradsekvationer samt när de fortsätter med högre matematik på gymnasiet.

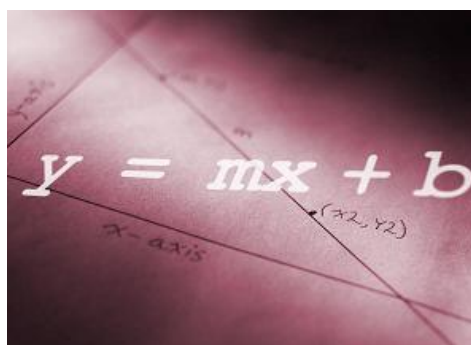
The Quadratic Formula ...

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

For Quadratic Equations
 $ax^2 + bx + c = 0$

It's not that bad





³ Fig. 3 Formeln för andragradsekvation och linjens ekvation

Redan i grundskolan bör introduceras begreppet ”mönster” på ett lätt vardagsspråk. Senare bör man generalisera för att eleverna successivt vänja sig vid att teckna algebraiska uttryck. För många elever är de algebraiska operationerna svåra att förstå och därför saknar tillit till. Det skulle underlätta om man knyter ihop ett antal räkneoperationer i algebra till motsvarande operationer för tal i bråkform och presenteras eleverna på ett lättförståeligt sätt. Lärarna måste också välja strategier, modeller och metoder för att utveckla förtrogenhet hos elever för matematikens uttrycksformer.

Det behöver byggas upp en förståelse för hur räknelagar och regler kan generaliseras från tal i bråkform till algebra och även till operationer med irrationella tal som kvadratrötter. För elever som har förståelse för detta är det lättare att acceptera och förstå algebraiska regler och formler vilken ger förtroende till sin matematiska förmåga. Vi måste ägna mer uppmärksamhet åt vad det innebär att använda bokstäver för att beteckna tal, samt förbereda eleverna att se matematiska mönster och att beskriva strukturen till algebraiska beskrivningar.

För att man ska ha kontinuitet i kunskapsutvecklingen måste man planera noggrant vad eleverna på sikt ska ha sina kunskaper till. Erfarenheter från gymnasieskolor och högskolor visar att många av dagens elever har stora problem med algebran, vilket i sin tur får konsekvenser inom funktionsläran (Kilborn, 2014).

”Är bråkräkningen svårt?” Löwing (2002) påstår att det handlar bara om dåliga och överformaliserade undervisningsmetoder.

³ <http://cms.uhd.edu/qep/algebra>

3.3 Bråk i andra grundskoleämnen

I det här avsnittet presenterar jag bråkets användning i hemkunskap, slöjd, musik, ekonomi och samhällskunskap.

Den nya lärarrollen kräver en ökad didaktisk kompetens. Varje lärare måste utveckla sin förmåga att utarbeta, utvärdera och ompröva sin undervisning tillsammans med elever och kollegor som undervisar i andra ämnen. Idag samverkan mellan kärnämnen matematik och karaktärsämnen saknar tradition. Hittills lärarna har arbetat med varje ämne för sig. Samverkan eller tematiskt arbete borde leda eleverna att bilda en uppfattning om hur kunskap används ute i livet efter skolan. Denna samverkan borde hjälpa eleverna att använda sina bråkkunskaper i slöjd, tolka tabeller och diagram i samhällskunskap, använda bråkräkningen i hemkunskap eller musik, det vill säga i en mer realistisk miljö. Dessa användningsområden av bråk och matematikkunskap ger eleverna ett tydligt intresse och utveckling i vardagsnära problemlösning förmågan. Kopplingen till andra ämne ger möjlighet för elever att kunna uppfatta och tolka information som finns i massmedia och att kunna välja och ta den bästa besluten i ekonomiska frågor eller i samhällsrelaterade debatten. I Skolverkets kursplan för samhällskunskap står tolkningen för centrala innehåll och undervisningen ska behandla följande:

”Hur hushållens, företagens och det offentliga ekonomier hänger samman. Orsaker till förändringar i samhällsekonomin och vilka effekter de kan få för individer och grupper.” Skolverket (2011, s. 203).

Det finns flera områden där eleverna kan använda den dagliga vardagsproblematik som till exempel val av telefonabonnemang, val av el-leverantör, val internetabonnemang, val av boende etc.

3.3.1 Bråk i hem- och konsumentkunskap och i slöjd

Ämnet hemkunskap påvisar tre perspektiv: miljö, hälsa och ekonomi. De tre olika perspektiven går i varandra och finns ständigt närvarande i undervisningen. Enligt Brunosson (2010) hemkunskap är ett tvärvetenskapligt ämne med flera inslag av bland annat matematik. Varför elever har svårt att förstå och tillämpa bråktal i köket? Det visar sig att eleverna kan lära sig mer genom att ett praktiskt inlägg kopplas till teorin. Ett exempel på användning av bråkräkningen i hemkunskap är när eleverna får i uppgift att laga en fruktpaj med målet att halvera receptet och berätta hur skulle gå till väga med det.

Uppgiftens resultat var att elever med starka teoretiska kunskaper krånglar ofta till sina uträkningar. Elever med svaga teoretiska kunskaper tillämpar ofta praktiska lösningar. Den första gruppen använde metoden att omvandla blandade formen till bråkform och sedan dela nämnaren med två. En annan vanlig metod som samma grupp använde var att omvandla bråken till decimalform och då blev det svårare för elever att kunna utläsa om svaret är rimligt. Den andra gruppen hade gemensamt att de såg en lösning på problemen men visste inte hur de skulle gå tillväga (Brunosson, 2010).

Ämnesövergripande undervisning mellan hemkunskap och matematik skulle kunna visa på ett vardagligt användningsområde för bråk och skulle kunna underlätta lösningen för vardagsnära problematiken. Beräkning av bråk presenterar svårigheter när de behöver relateras till praktiska aktiviteter. Genom ett samarbete mellan ämnen skulle lärare kunna stärka elevernas kunskapsbyggande (Moen, 2014).

Det är viktigt att eleverna arbetar med recept att de kan beräkna mängder och då krävs kunskaper om olika mått. Eleverna behöver arbeta under matematiklektionerna med konkret förankring till mått och mängd uppfattning som är avgörande för grundläggande kunskaper i matematik (Löwing & Kilborn, 2002).

Ett annat ämne där ofta förekommer beräkning med bråk är slöjd. Ett typiskt exempel för slöjd i skolan är när eleverna fick i uppgift att kapa en bräda som är 217 cm lång. Den första metoden eleverna använde var att de valde att anta att brädan är 216 cm lång. Om man mäter 108 cm från båda kanterna så blir det kvar 1 cm på mitten. Eftersom även den måste delas i lika delar så blir det två bitar på 108,5 cm. Den andra metoden eleverna valde var att markera 100 cm från var sin sida. Det blev 17 cm kvar att dela på mitten. En tredje metod var att använda sig av ett snöre som är lika lång som brädan. Genom att vika snöret i två lika stora delar, finner man dess mittpunkt, som i sin tur kan avbildas på brädan. Genom att stimulera eleverna att gissa och pröva, får man dem att våga attackera olika problem vilket är en förutsättning för att utveckla bättre problemlösningsmetoder (Löwing & Kilborn, 2002). Fokus ska sättas på selektivt urval av specifika problem för olika elevgrupper beroende på kunskapsnivån. Planeringen av uppgifter som utvecklar problemlösningsförmågan måste planeras med tydligt syfte på målet och kunskapsstoffet.

3.3.2 Bråk i musik

Musiken kan bidra med att väcka intresse och att se matematik från ett annat perspektiv. Musik är något som de flesta elever tycker om och då berör eleven personligen samt ökar kommunikationen i matematikundervisningen.

Taktarten i musik skrivs som ett oförkortat bråk utan bråkstreck, till höger om klaven på den första notlinjen och vid taktsavbyte. Bråkens täljare anger antal taktslag som varje takt består av medan nämnaren anger vilket notvärde som ska representera ett taktslag: till exempel 2=halvnot, 4=fjärdedelsnot, 8=åttondelsnot. Taktarten är ett uttryck för en takts noterade längd. Taktens fysiska längd bestäms av styckets tempo. Tempon avgör hur lång tid ett taktslag varar. Takten $\frac{3}{4}$ trefjärdedelar betyder att varje takt består av tre taktslag och att varje taktslag ska representeras av ett notvärde på en fjärdedel. Takten innehåller noter och pauser på en samlad längd av tre fjärdedelar. Genom att lyssna på det betonade taktslagen med lite övning kan man bestämma taktarten (Gustavsson, 2006).

Längre fram i historien fanns ett brödraskap som kallade sig Pythagoreerna som verkade under 500-talet före Kristus. De upptäckte ett samband mellan hela tal och musik som gav bråktalen en helt ny innebörd och betydelse. Deras upptäckt var att om två strängar, av samma material och samma spänning klingade harmoniskt tillsammans så fanns det ett enkelt samband mellan längderna. Om den längre strängen gav grundtonen så gav en hälften så lång

sträng oktaven, en som var $\frac{2}{3}$ gav kvinten och $\frac{3}{4}$ gav kvarten. Även de andra rena tonintervallensvarade mot enkla samband mellan ”små” hela tal.

I Lasse Berglunds bok ”Tal och mönster” nämns också Bachs fugor som exempel på hur man matematiskt kan arbeta med grupper av notvärden av olika längd och tonhöjd för att skapa så kallade polyfona stycken. Strukturen var i Bach kompositioner viktig, en linjär ström av välplacerade 1/16 noter och 1/8 pauser, precis som i matematiken när vi löser serier med bråkuppgifter.

3.3.3 Bråk i ekonomi och samhällskunskap

I Skolverkets (2011) styrdokument står att eleverna efter grundskolan ska ha: ”grundläggande kunskaper om tal i bråkform genom att dela upp helheter i olika antal delar samt jämföra och namnge delarna som enkla bråk” (s. 67).

Eleverna möter räkning med bråk i situationer som är väl bekanta för de som till exempel hur man hanterar en kredit, ett lån, hur minimerar eller maximerar vinsten med 1/10 del. Kursböckerna behöver omformuleras så att undervisningen i matematik stegvis ökas i svårighetsgrad för varje årskurs och de ska presentera en tydlig koppling till vardagen. Ibland uppfattas inte vardagssituationer som matematik baserade utan räknas till kategorin logisk tänkande.

Några exempel på vardagsmatematik som eleverna kan utgå ifrån är hämtade från hushållsberäkningar eller massmedia (tidning, tv, internet). Här omfattas all information om idrott, börsen, hushållsekonomi, statistik med mera. Vardagsproblem består inte bara av enkla hushållsräkningar utan problem som består av större svårigheter och kräver lösning i flera steg. Som till exempel: eleven flyttar hemifrån och skaffar sig ett hus. Då kan man uppskatta en realistisk värde av fastigheten med hjälp av en karta. Detta problem kräver en genomtänkt planering av kostnader men också uträkning av driftkostnaderna. Kostnaderna med kopplingar till hushåll är val av telefonbolag, val av elleverantörernas erbjudande, val av internet leverantör. Överallt i beräkningar behöver man hantera bråk begreppet.

Ekonomiska planeringar görs när man som ung placerar sina sparkapital eller väljer man den bästa kreditgivare med bästa räntesatsen. Enklare hushållsuppgifter skulle kunna vara att planera näringsrika måltider med ekologiska produkter till ett bra pris eller att själva planera en skolresa antingen i Sverige eller utomlands och då ska man räkna ut: resekostnaden, övernattningen, mat, inträdesavgiften m.m. Andra enkla vardagsproblem som elever behöver kunna lösa är tolka idrottsresultaten i tidningen, ekonomiska informationer i form av tabeller eller diagram vilka kräver bara baskunskaper utan utvecklade problemlösningssförmåga.

Vissa debattartiklar i tidningar kräver baskunskaper i matematik och kräver en rätt tolkning för att kunna debatteras i samhälle eller under SO lektionerna där tillsammans med läraren ska följa upp verkliga situationer i vardagen. Det skulle vara till hjälp för elever att skapa en selektiv databas med vardagsproblem där en samordning mellan SO-, NO-ämnen, slöjd, hemkunskap, musik och media skulle finnas. Den här databasen ska vara tillgänglig och det ska selektivt lagras det vill säga efter svårighetsgrad för att den ska kunna användas av alla elevgrupper. Genom problemlösning enskild eller i grupp eleverna lär sig olika vägar att lösa problem samt genom diskussioner börjar se eleverna ett rimligt alternativ lösning för samma

uppgift (Lindqvist, 1999).

Sammanfattning av litteraturgenomgången

Matematiken är en självständig vetenskap. Eleverna lär sig tänka logisk, lär sig vara kreativa och utvecklar estetiska förmågor. Svårigheterna med förståelsen för bråkbegreppet kan bero på att undervisningen gått för fort fram och saknas reflektionen. Det tar tid innan den kompletta förståelsen för bråkbegreppet har utvecklats. När eleverna är engagerade i matematiska aktiviteter utvecklar de själva föreställningar om matematiska begrepp och objekt. En matematisk miljö skapas genom lärarens förståelse av elevers föreställningar så att läraren och eleven kan diskutera och utveckla dessa.

I vardagen och i matematikuppgifter förekommer delning av en helhet och del av ett antal samtidigt, vilket ytterligare visar på komplexiteten i begreppet. Ett exempel på detta är när vi säger "en fjärdedel av klassen". Då innebär bråket både en fjärdedel av helheten som i detta fall är klassen och även som del av ett antal eftersom vi måste veta antalet elever i klassen för att få reda på hur stor fjärdedelen är.

Enligt Kilborn (1990) är det viktigt för lärare att behärska både vardagens bråktal och matematikens bråktal. Det första för att uppnå målen i ämnet matematik, det andra för att få en helhetsbild av bråkbegreppet, vilket också hjälper läraren att förstå vilken nästa målnivå krävs av eleven. Om vi lär eleverna att tillämpa deras kunskap i matematik som de har tillägnat sig i skolan för att använda den i vardagen, blir matematiken mer positiv laddad som ämne.

4. Teoretiska utgångspunkter

I teoriavsnittet presenterar jag Piagets och Vigotskij samt några matematik ämnesdidaktikers syn på lärande som har haft en viktig inflytande för dagens pedagogik. Piaget formulerar perspektivet på kunskap och utveckling som brukar kallas konstruktivistisk, mer exakt en variant av individualistisk konstruktivism. Hans teori och syn på lärandet har fokus på att barnet till naturen är egocentriskt, det vill säga att det uppfattar omvärlden endast utifrån sin egen utgångspunkt.

Enligt Piaget det finns två processer som är centrala för kognitiv utveckling och adaptation: assimilation och ackommodation. Hans teori är en mognads teori och som en följd av detta vi kan anta att människor når ett visst utvecklingsstadium när de kan lära sig abstrakta begrepp och operationer. Han påstår att utveckling uppkommer genom erfarenhet och genom barnets egna aktiva konstruktion av kunskap. Hans pedagogiska ideal innebär att man ska stödja barnens självständiga kunskapsutveckling.

Piagets perspektiv fick ett mycket stort inflytande i många länder. Lärarna tog till sig denna syn på kognitiv utveckling. Grupparbete, laborationer och elevaktiva arbetssätt rekommenderades i läroplaner och hade blivit accepterade av lärarna. Han betonar inte perspektivet på lärande och undervisning men han har ett klart perspektiv på lärandets ”vad” och ”hur” frågor (Säljö, 2015).

För Vigotskij en central utgångspunkt som avgör hur man ser på lärande är att människans förmåga – fysiska, intellektuella och sociala – inte bestäms av hennes biologiska förutsättningar, utan hon kan utveckla och använda redskap. Vi skapar fysiska redskap för att förändra vår relation till omvärlden (t ex. hörapparat). Vi använder också intellektuella redskap när vi tänker och kommunicerar. Det mentala redskap fungerar som medierade redskap för oss när vi tänker, talar och skriver. Det viktigaste av dessa redskap är det mänskliga språket som Vigotskij benämner ”redskapens redskap”. Genom språket kan vi beskriva, tolka och analysera världen på en mängd olika sätt.

En av Vigotskij utgångspunkter är att det lilla barnet formas i samspel med sin omgivning. Att födas innebär att föras in i en värld av kommunikation med omgivningen. Barnet är aktiv i sitt utforskande av världen och ökar hela tiden sin förmåga att samspela med omvärlden.

Han menar vidare att vi blir till som tänkande varelser genom att delta i kommunikation och bekanta oss med språk, tänkande, idéer och praktiker. Föreläsningsvis han menar att vi inte är påverkade av vår kultur utan vi formas som sociokulturella varelser genom att använda oss av sociokulturella redskap i vår vardag.

Barnet möter i interaktion med vuxna språkliga uttryck och sätt att bete sig, som barnet lär sig känna igen. Senare barnet använder dem spontant. Lärandet sker genom deltagande i interaktion och utan att situationen i sig är organiserad för lärande det vill säga kunskaper och erfarenheter förs mellan människor i kommunikation. Socialisationen innebär att barnet möter och lär de grundläggande kunskaper och färdigheter i sin omgivning. Omgivningen utgör de omständigheter inom vilka barnet i samspel med andra utvecklar sin identitet, sina intressen och värderingar. Språket är centralt i denna process menar Vigotskij.

Ord och uttryck utvecklas hela tiden. Barnet så småningom själv kan avgöra när ordet kan användas. Denna utvecklingsgång är en social-kulturell tradition kopplat till vad Vigotskij kallar "den närmaste utvecklingszonen" ZPD. Enligt honom är människan ständigt under utveckling och förändrar sig genom att skapa erfarenhet. När vi kan och behärskar något så blir det också en plattform för att lära vidare. Det finns något vi kan redan, men också något vi behöver hjälp med att lära att komma vidare.

Skillnaden mellan Piaget och Vigotskij är tydlig: för Piaget är kognitiv en förutsättning för lärande. Enligt honom kan man inte lära en intellektuell färdighet om man inte nått den utveckling eller mognadsnivå som förutsätts. För Vigotskij är processen den motsatta. Vi lär genom att ta till oss redskap och därför blir vi alltmer kulturellt kompetenta varelser. Lärandet föregår utveckling. Genom lärande tar vi till oss delar av samhällets erfarenheter och gör dem till våra egna. För Vigotskij var idén om den proximala utvecklingszonen viktig och förklarar genom att den nya kunskapen som ska lära sig in grundar på att man redan kan, det nya kopplas till det redan man uppnått. En lärare kan stötta lärandet genom instruktioner som utgår från vad barnet kan och gör det möjligt för barnet att gå vidare i kunskapsutvecklingen. Läraren kan till skillnad från en lärobok eller dator leda barnet vidare i sin inläring av kunskaper och färdigheter (Säljö, 2015).

Vigotskij menar att skolan är en väg att lära vad han kallade vetenskapliga begrepp som han skiljer från den spontana. Läraren får en central roll som länk mellan barn vardagliga erfarenheter och den akademiska världen. Det är lärare som i samspel med barnen kan identifiera barnets nuvarande kompetens och deras "närmaste utvecklingszon".

Vigotskij och Piaget har skilda syn på undervisningen och på lärarens roll. För Piaget var barnets egen aktivitet och dess egna upptäckter av hur världen fungerar det som leder till utveckling. Piaget var en individuell konstruktivist, han menade att individer konstruerar sina egna kunskaper utifrån sina egna upptäckter och erfarenheter. Vigotskij är en socialkonstruktivist som säger att vi lär genom att bli delaktiga i kunskaper och erfarenheter som vi får från människor med mer kompetens inom ett visst område. Läraren är en nyckel person när det gäller att göra mer abstrakta och institutionella begrepp och kunskap tillgängliga för nya generationer. Färdigheter och kunskap har ingen slutprodukt, vi kan hela tiden utvecklas vidare.

Didaktiska ämnesteorin i matematik bygger dels på hur olika begrepp utvecklas genom tiden, dels på forskning om hur olika elever uppfattar olika begrepp. Johansson och Kilborn (1986) menar att det behövs en speciell teori för hur elever kan bygga upp ett matematiskt kunskapsförråd. Målet med matematikundervisningen är att eleverna skall lära sig förstå och använda ett antal matematiska begrepp och modeller. Denna begreppsbildning går från det enkla vardagsproblemet till mer komplicerad abstrakt matematik. Didaktikern Kilborn (1990) kommenterar lärandet genom problemlösning i boken "*Didaktisk ämnesteorin i matematik*" på följande sätt: "När man skall lösa ett problem i verkliga livet så är det faktiskt resultatet som räknas."(s. 75)

Vad författarna menar är man som lärare inte får bli så fixerad vid problemlösandet i sig att man glömmer bort att varje elev också skall kunna prestera en korrekt beräknad och praktiskt fungerande lösning på problemet. Det finns skolor som prioriterar problemlösning hos elever. Att lärare skall bli mer professionella och mer aktiva inom forskning är något som efterfrågas idag.

5. Metod

5.1 Innehållsanalys

Jag har valt att använda den kvalitativa innehållsanalys metoden. Det innebär att man använder sig av skriven text från samtal och observationer. Jag har använt mig av de transkriberade intervjuerna som huvudsaklig informationskälla för att kunna analysera informanternas åsikter om varför bråk är svårt för elever.

Den kvalitativa forskningen visar tre skillnader: en induktiv syn det vill säga teorin genereras på grundval av praktiska forskningsresultaten, den andra en kunskapsteoretisk ståndpunkt som ligger på förståelsen av sociala verkligheten och den tredje är en ontologisk syn, vilket innebär att sociala egenskaper är resultatet av ett samspel mellan individer och inte företeelser (Bryman, 2002).

Uppsatsen handlar om att först sätta in de tolkningar som framkommit i en samhällsvetenskaplig referensram. Den andra stegen är när jag tolkar matematiklärnarnas tolkningar. Den tredje tolkningsnivå är att jag själv tolkar begrepp, teorier och den litteratur som finns inom ämnesområdet (Bryman, 2002).

Forskningsmetoden jag använder i undersökningen är hermeneutiken som är vetenskapen om rätt tolkning av en text. I min studie är de transkriberade intervjuerna som är texten. Det som kommer att påverka tolkningen är min förförståelse av ämnet det vill säga de kunskaper i ämnet jag redan har. Tolkningen kommer att växa fram i en "hermeneutisk cirkel" det vill säga en cirkulär rörelse mellan min förförståelse och möten med de intervjuade lärarnas erfarenheter och idéer. Det här leder till ny förståelse som i sin tur blir förförståelse i kommande ansatser. Den hermeneutiska cirkeln handlar om samband mellan helhet och delar, tolkningar bygger alltid på andra tolkningar.

5.2 Semistrukturerade intervjuer

En semistrukturerad intervju innebär att jag som intervjuare har en lista över ett specifikt tema som ska beröras, detta kallas för en intervjuguide. De personer som ska intervjuas har stor frihet att utforma svaren på sitt eget sätt. Frågorna behöver inte komma i samma ordning som i intervjuguiden det vill säga intervjuprocessen är flexibel. Fokus måste också vara på hur intervjupersonerna uppfattar och tolkar frågor och skeenden, det vill säga hur de förklarar och förstår händelser, mönster och beteenden (Bryman, 2002).

Jag konstruerade en intervjuguide som är ett bra verktyg för att genomföra intervjuerna (Bilaga 1). Bryman (2002) menar att det viktigt att inleda intervjuerna med en öppen fråga för att fånga lärarnas tankar. Det är en semistrukturerad intervju som är kopplad till uppsatsens syfte och frågeställningar.

De intervjuade lärarna fick möjlighet att tolka frågan och säga fritt vad de tyckte. Det var också relevant att höra hur de ser på bråkundervisningen i matematik, i NO-ämnena och i vardagsnära situationer. Det kan vara svårt att vara objektiv när handlar om människor (Bryman, 2002). Insamlingsmetoden som hör till de kvalitativa metoderna är intervju, observation och diagnoser.

5.3 Genomförande

Genomförandet började jag med planering av frågorna och reviderade dem när det behövdes. Jag utförde intervjuer bland de lärarkollegor som undervisar i matematik och NO-ämnena samt matematik och praktisk-estetisk ämne.

5.3.1 Urval

Jag valde icke-slumpmässiga urvalet där hör till kvoturvalet, när jag ville ha ett representativt urval med avseende på yrke och ålder. Ett stort problem med detta urval är att jag bestämmer vem som ska intervjuas, mest avgörande faktorer var yrkeserfarenhet och skicklighet, samt ålder, kön och att dessa lärare undervisar både i matematik och NO-ämnena eller matematik och praktiskt-estetiskt ämne. Insamlingen av data har skett genom inspelade intervjuer. Urvalet av intervjupersoner har samband med uppsatsens syfte. Mina frågor är öppna för att eliminera mitt inflytande på de intervjuade och för att undvika feltolkningar samt att få fram något nytt och spännande.

Lärarna ställde upp för att berätta deras långa erfarenheter vad gäller de studerade temana: varför är bråkräkningen svårt för elever i högstadiet och vad kan vi göra åt det. Många författare bland annat Löwing (2008) har analyserat och studerat närmare frågan och har kommit till några slutsatser som jag redan pekade på i teoridelen. Undersökningsgruppen skulle vara fem lärare i matematik i kombination med NO-ämnena och slöjd som arbetar i skolor på högstadiet i Västra Götaland.

5.3.2 Intervjuer

Intervjuerna med lärarna var semistrukturerade och var mellan 20 och 40 minuter långa. Jag valde den formen av intervju därför att det finns möjligheter att ändra både ordningsföljden och också formen av intervjun. Den stödjer mig till att följa upp deras svar. När jag frågade de berörda lärarna om jag fick intervju dem informerade jag om att syftet med intervjuerna var att undersöka hur de lägger upp sin matematikundervisning vid introduktion av begreppet bråk. Vidare informerade jag om att jag skulle spela in intervjuerna på ljudband, göra utskrifter av dessa och att i utskrifterna av intervjuerna dölja namn och skola. Jag informerade också om att det är enbart jag, som skrev examensarbetet, som skulle lyssna på ljudbanden. Jag bestämde tid för intervjuerna, efter lärarnas ordinarie arbetstid. Jag ville att det skulle finnas gott om tid och vi hade träffats i ett grupprum där inga störande moment fanns.

5.3.3 Kategoriindelning

Redan från första intervjun påbörjade jag analysprocessen som syftar till att fånga substansen i data och bryta ned dem i mindre begrepp vilket är det första stadiet till kategorisering. Efteråt systematiskt grupperade svaren från intervjuerna genom att jämföra vad de olika lärarna har sagt. För att kunna kartlägga det insamlade data, systematiserade jag med avseende på begrepp och sedan sammanförde svaret till kategorier. De fem indelade kategorierna är följande:

- Första kategorin handlar om metoder som erfarna lärare använder för att undervisa bråk.
- Den andra kategorin handlar om byggande av begreppsmodeller.
- Den tredje kategorin påverkan av fallgroparna för fortsatta studier.
- Den fjärde kategorin är hur bråksvårigheterna påverkar framför allt NO-ämnena och för elever som inte studerar vidare, vardagen.
- Den femte kategorin är om mina tolkningar stämmer överens med de intervjuade lärarnas beskrivningar och med svårigheter som forskningen i ämnet beskriver.

Jag använder den kvalitativa innehållsanalys metoden i min uppsats. Informanterna svarar på didaktiska frågorna: "Vad", "Hur" och "Varför". Löwing (2002) i hennes forskarrapport ger oss en ämnesdidaktisk modell och samtidigt en definition på frågorna: "Vad" handlar om valet av stoff man skall undervisa om, inklusive definitioner och regler, "Hur" handlar om valet av arbetsformer och arbetssätt och "Varför" handlar om att ta ställning till legitimitet, varför det är viktigt att undervisa om just det området på det sättet.

Dessa frågor ställs ofta av författarna Calgren och Marton (2000) och beskrivs på följande sätt: "Vad" och "Hur" är kopplade till varandra. "Hur" aspekten är de processer som avgränsar "Vad" aspekten. Vad och hur frågan är väl beskriven som lärarnas yrke i "*det professionella objekt*" där kårens erfarenheter samlas från generation till generation med hjälp av forskning, dokumentation och kommunikation. Lärarnas professionella objekt är lärande som konkretiserar i utveckling av olika förmågor och förhållningssätt hos eleverna. Vidare författarna skiljer mellan att kunna något och att lära andra det man kan. Frågan "Hur kan man utveckla barnens förmåga att läsa, skriva, använda de fyra räknesätten? Men innan vi ställer frågan Hur måste vi ställa också frågan Vad innebär detta?" (s. 52). Genom att kunskaper utvecklas inom lärarkåren då ökar den enskilda lärarens förmåga att ha bättre verktyg och metoder att använda i sitt dagliga arbete. Ett välfungerade nätverk har bildats mellan forskare, utvecklingsledare och undervisande lärare.

5.4 Kvalitetskriterierna

I det här avsnittet kommer de olika kvalitetskriterierna *validitet*, *reliabilitet* och *generaliserbarhet* beskrivas och kopplas till studien.

5.4.1 Validitet

Validitet i en intervju handlar om respondenten talar sanning. Detta kan, enligt Denscombe (2009), vara svårt att kontrollera i de fall intervjun berör den intervjuades uppfattningar, känslor och erfarenheter. Bryman (2002) använder sig av begreppet "tillförlitlighet" när han skriver om validitet. Han beskriver fyra delkriterier för validitet; *trovärdighet*, *överförbarhet*, *pålitlighet* och *en möjlighet att styrka och konfirmera*. Trovärdighet motsvarar intern validitet, det vill säga att resultaten i en undersökning är säkerställda med de regler som finns och att resultaten rapporteras till de personer som deltagit i undersökningen. *Överförbarhet* innebär extern validitet, det vill säga att det sker en bedömning ifall resultaten går att överföra till en annan miljö. *Pålitlighet* kan jämföras med reliabilitet (beskrivs senare). *Möjlighet att styrka och konfirmera* motsvarar objektivitet, och detta innebär att forskaren försöker säkerställa att

denne har agerat i god tro. Att agera i god tro innebär i sin tur att inte medvetet låta sina egna värderingar påverka undersökningens resultat (Bryman, 2002).

I arbetet har hänsyn tagits till validitet och försök till att agera i god tro och inte låta mina egna värderingar påverka resultatet har funnits. Samtliga namn som uppges i undersökningen är fingerade, då jag vill behålla de tillfrågades anonymitet.

Validiteten i en undersökning innebär att man mäter det som man anser att mäta. Jag har sökt i webbsidor utifrån syftet och använt sökorden: bråk och bråkets användning i olika sammanhang. För att finna svar på alla mina frågeställningar testade jag även andra sökord som arbetssätt för lärare i matematik, bråk och vardag, bråk i andra skolämne. Undersökningen har hög reliabilitet intervjupersonerna representerar inga andra än sig själva. Även validiteten är hög eftersom jag söker och målmedveten letar efter svar.

5.4.2 Reliabilitet

Reliabiliteten anger tillförlitligheten i en mätning. Resultatet vara detsamma oberoende av vem som utför testet som betyder intern reliabilitet och vid upprepade mätningar extern reliabilitet. Reliabilitet är inte det samma som validitet därför att ett test kan ha hög reliabilitet och låg validitet och tvärt om. Validitet innebär att testet mäter det som det är avsett att mäta. Reliabiliteten handlar om hur trovärdiga resultaten är.

Det som ökar tillförlitligheten är att varje intervju är ljudinspelat. All informationsmaterial har transkriberats. Transkription innebär en selektion och tolkning av det talade ordet. Transkription innebär också att något nytt skapas, det man får är inte själva talet, utan en selektiv representation av det sagda. Transkriberat tal kan aldrig återge blickar, gester eller kroppshållning. Detta innebär att jag kan sammanfatta det talande ordet men inte kroppsspråket och inte heller de gester som följer under intervjuerna.

I kvantitativa studier handlar reliabiliteten om att eliminera felkällor, men även tolkningsaspekten är en avgörande faktor. Dessa begrepp är relevanta för kvalitativa undersökningar också, som t.ex. om två olika personer gör samma studie och får samma resultat blir intervjusubjektiviteten hög och därmed reliabiliteten hög.

Denscombe (2009) menar att forskaren har en tendens att vara nära knuten till undersökningen och att detta kan påverka reliabiliteten. En hög tillförlitlighet baseras på att liknande svars ges av flera personer och eventuella skillnader beror på variationer hos de personer som intervjuas.

Bryman (2002) använder sig av begreppet *pålitlighet* vid beskrivning av reliabilitet. I undersökningar bör forskare anta ett granskande synsätt för att kunna säkerställa att det skapas en fullständig och tillgänglig redogörelse av hur forskningsprocessen har genomförts. I arbetet stärks lärarnas svar i intervjuerna vilka höjer reliabiliteten då det blir synligt om deras uppfattning om elevernas matematiska kunskaper.

5.4.3 Generaliserbarhet

Sökningen kan inte generaliseras till att alla skolor därför att alla lärare behandlar bråkräkningen på sitt eget sätt och erfarenhet. Eftersom urvalet är litet kan jag inte dra några generella slutsatser ur resultatet men informanterna har en relativ stor variation inom antal år i

yrket, utbildning, kön och arbetar vid olika skolor vilket medför att resultatet ger en relativt sann bild av verkligheten.

Kvalitativa undersökningar görs ofta intensivt och med få respondenter, vilket försvårar generalisering av svaren och de slutsatser som dras av forskaren. I dessa fall bör istället termen "överförbarhet" användas då det ger en annan ingångsvinkel (Denscombe, 2009).

Bryman (2002) använder sig också av begreppet *överförbarhet* av den anledningen att kvalitativa forskningar ofta enbart undersöker en liten del av befolkningen i det valda undersökningsområdet. När endast en liten grupp personer väljs ut får undersökningen ett djup istället för en bredd, och detta gör att det kan vara svårt att överföra resultaten till andra miljöer än den miljö där undersökningen är gjord.

5.5 Etiska överväganden

Inom intervjuundersökningar finns några bestämda regler för hur man ska gå tillväga i en intervjusituation, men det finns riktlinjer. Tre av dessa riktlinjer är: *informerat samtycke*, *konfidentialitet* och *konsekvenser*.

Uppgiftslämnare och deltagare i en studie skall informeras om studien och villkoren för deltagande. Den första forskningsetiska principen innebär att informationskravet måste respekteras, det vill säga att deltagarna ska få information om studiens syfte. I den här uppsatsen har personerna valt att inte ge ut sitt riktiga namn men de godkänd att allmänheten tar del av informationen. Informanterna kommer att ha fingerade namn och avsikten med namnåtergivningen är att lättare åskådliggöra intervjuerna. Bryman (2002) tar även upp att de uppgifter som samlas in endast skall användas för forskningsändamålet.

Alla intervjupersoner informerades om att undersökningen var frivillig och informanterna själva valde vad de ville berätta för mig och att uppsatsen, då den blir klar, kommer bli offentlig på universitetets hemsida. Jag informerade också om att jag ville spela in intervjuerna och alla gav sitt samtycke till det. Konfidentialitet handlar om att man ska skydda informantens identitet och privatliv. När det gäller inspelningarna som jag gjort, så har ingen annan än jag själv haft tillgång till materialet.

6. Resultat och analys

6.1 Resultat

I det här kapitlet beskriver jag hur tolkningsprocessen har gått till. För att kunna kartlägga det insamlade data, systematiserade jag med avseende på begrepp och sedan sammanförde svaret till kategorier. Jag har använt mig av de transkriberade intervjuerna för att kunna analysera de fem kategorierna. Resultaten från intervjuerna kommer att presenteras och kopplas till undersökningens frågeställningar. Analysen av resultaten från intervjuer kommer även kopplas till undersökningens syfte.

Här redovisas resultaten av de transkriberade lärarintervjuerna:

Anna:

Varför är beräkningen med bråk svårt för elever? Har du egna metoder som leder till framgång? Vilka didaktiska aktiviteter använder du? Hur kopplar du bråket med NO-ämnena?

Man använder inte bråk i vardagen. Det är svårt. Bråk blir abstrakt. Även om eleverna förstår $\frac{1}{4}$ del när de behöver dela den med 4 då blir det svårt och abstrakt. När elever omvandlar kvoten till decimaltal då blir det lättare, på grund av det är lättare att förflytta decimaltecknet. För att underlätta bråkräkningens undervisning och förståelse måste vi införa problemlösning med vardagsnära anknytning. Övergången från ett avsnitt i matematik till annan måste ske med noggrannhet, metoden borde vara att blanda olika former av beräkningar som till exempel lösa med procent istället för bråk och proportionalitet lösa med bråk istället för decimaltal.

Hennes egna metoder beprovades under flera år med framgångsrikt resultat och visade sig vara en väl fungerande modell som byggs upp på följande sätt: två timmar färdighetsövning i läromedlet och en timme problemlösning. För att få denna metod att fungera behöver eleverna ungefär en termin. Hon använder som metod grupparbete och arbete med anknytning till NO-ämnena.

Hennes didaktiska aktiviteter består i att förstå bråktabellen, plaster med bråk som eleverna behöver räkna med och papper och sax när eleverna delar upp remsan på olika sätt. En annan form är den elektroniska verktyg: eleverna spelar matematikspelet Cheopspyramiden. I NO-ämnen hon använder symboler till exempel triangeln med sträcka, hastighet och tid och påpekar eleverna att de kan använda det överallt. Hon övar upp förståelsen av bråk begreppet på vanliga bråk för att sedan fortsätter med svårare begrepp. Ritar mycket på tavlan och försöker förklara från olika håll. Uppmuntrar eleverna att öva på färdigheterna och påstår att repetition är kunskapens moder.

Sammanfattning av Annas svar

- Introducerar bråken i meningsfulla sammanhang och fortsätter med svårare uppgifter
- Tränar bråktal som just ett tal
- Ritar och tolkar bilder som stöd för lärandet som är tagna från vardag
- Befäster bråktal-decimaltal-procenttal genom att blanda olika former av beräkningar
- Använder sig av konkret material och elektronisk spel
- Hon arbetar ämnesövergripande (NO)

Magnus:

Varför är beräkningen med bråk svårt för elever? Har du egna metoder som leder till framgång? Vilka didaktiska aktiviteter använder du? Hur kopplar du bråket med NO-ämnena?

Eleverna har för lite förkunskaper från mellanstadiet. Svårigheten består av luckor i bråkkunskap, de saknar praktiska aktiviteter som är kopplade till didaktiskt material. Han använder vardagsnära objekten som kan konkretisera bråken, till exempel klocka, kub. Eleverna visar kunskap om enkla bråk i vardagen men möter svårigheter i klassrummet när vi lärare använder matematiskt språk. Vissa elever som har goda förkunskaper i bråk får utmaningar från Känguru (Skolverkets problembank) och de behöver redovisa en och en först, sedan i grupp för att lära sig från varandra.

Metoden han använder i bråkberäkning är att fördubbla nämnaren och ber eleverna att hitta mönster i bråkföljden. För att lösa olika svårigheter med bråk använder han problemlösning i klassrummet. När han introducerar ett nytt kapitel återkopplar och repeterar alla begrepp från föregående kapitel för att kunskapen ska fastna. I klassrummet grupperar han eleverna i blandade kunskapsnivåer för att eleverna ska nå ett bättre resultat. Metoden han använder sig av är framförandet av elevens egna lösningar och presentationen av dessa för andra elever så att alla kan utvecklas samtidigt.

Sammanfattning Magnus svar

- Konkret material är viktigt
- Knyter an till bråk som eleverna redan sett i vardagen
- Samtalar och diskuterar över matematiska begrepp tillsammans med elever
- Använder problembanken från Skolverket för att arbeta med bråk
- Använder olika undervisningsformer

Fredrik:

Varför är beräkningen med bråk svårt för elever? Har du egna metoder som leder till framgång? Vilka didaktiska aktiviteter använder du? Hur kopplar du bråket med NO-ämnena?

Eleverna har för lite förkunskaper från mellanstadiet. Bråk är svårt för många elever. Elever är vana från tidig ålder lösa enkla uppgifter till exempel dela godiset eller pizzan. När de kommer till att översätta bråket till matematiska symboler då uppstår svårigheter på grund av det inte sätts i relation till helheten. Delen av det hela är inte ett klart begrepp för många elever.

Hans metod att arbeta med bråk konkretiseras med att öka svårigheten av bråkberäkning som till exempel att räkna $\frac{1}{3}$ del och visa att den är lika med $\frac{2}{6}$ delar genom att multiplicera bråket med talen 2. Eleverna har mer förståelse för beräkningar med decimaltal och därför undviker bråkräkningen. När eleverna saknar grundläggande färdigheter för multiplikation har som följd svårigheter att öva färdigheter för operation med bråk.

Eleverna saknar verktyg för att hantera: taluppfattning och koppla bråken till enheten. Lösning för detta tycker han att ge eleverna problem med bråk i textform för att omvandla och

lösa operationerna med bråk. Arbetet redovisas först individuellt, sedan i grupp och sedan i klassrummet så att eleverna lär sig av varandra. Eleverna hanterar inte väl uppgifter med proportionalitet och förhållande. Han använder enkla didaktiska material: papper, sax, penna för att införa först enkla bråk för att han tycker att eleverna mår bra av att pyssla och lägga ihop och dra isär för att inte behöva abstrahera. Han går vidare till svåra beräkningar genom att öka förståelsen enligt mål och kunskapskrav. Han påstår att det behövs både färdighetsträning och att öka förståelse för bråk genom problemlösning. Han använder variation inom bråkundervisningen genom att guida in eleverna in i förståelse av bråk, diskutera och sätta ord på vad de kan och inte kan. I NO-ämnena (kemi, fysik) behövs kunskap om tal och taluppfattning och påstår att det står till grunden för alla beräkningar.

Sammanfattning av Fredriks svar

- Belyser tydligt och ofta taluppfattning med elever som till exempel: del-helhet, del-andel, förhållande, kvot och mått.
- Elevernas svårighet för symboler löser med varierad undervisning
- Samtalar och diskuterar med elever svårigheter med bråk och konkretiserar och övar med elever för att befästa kunskaper.
- Tränar eleverna för operation med bråk: multiplikation och division
- Övar problemlösningens förmågan hos elever
- Använder konkret didaktiskt material
- Han arbetar ämnesövergripande och lär eleverna att använda deras bråkkunskap i andra NO-ämnena.

Lena:

Varför är beräkningen med bråk svårt för elever? Har du egna metoder som leder till framgång? Vilka didaktiska aktiviteter använder du? Hur kopplar du bråket med ett praktiskt-estetiskt ämne?

Hon menar att eleverna har förståelse för enklare bråk men när de kommer upp på högstadiet möter de svårighet att arbeta med bråk med olika nämnare. Hon säger att eleverna behöver använda olika metoder för att klara olika delar av bråkberäkningar och de blandar ihop dessa metoder. Eleverna lär sig bråk på ett felaktigt sätt i tidigare stadier.

Hon använder enkla och konkreta didaktiska material för att underlätta förståelsen för elever. Eleverna saknar verktyg för att se delen och det hela, sambanden och proportioner. Hon tycker att dessa svårigheter och luckor påverkar deras svårigheter på gymnasiet. Som verktyg använder hon datorn Webmath, där eleverna behöver sätta ut bråkdelen av sträckan och ju närmare de kommer den rätta svaren desto bättre resultat de får. Hon menar att vissa matematiska begrepp fastnar lättare andra svårare och för att befästa bråk begreppet använder hon repetition. Angående kursplanen hon påstår att i Lgr80 riktlinjerna var att lärarna ska använda ett lättförståeligt språk, ett vardagsspråk och det matematiska språkbruket förlorades i undervisningen. Hon påstår om Lgr11 att kursplanen är mer omfattande och det är för många begrepp som införs redan på mellanstadiet och de skulle införas senare istället på högstadiet.

Hon hänvisar till en föreläsare om Sveriges matematikundervisning i internationell jämförelse. Hon menar att i Sverige introduceras först decimaltalen och efteråt bråk begreppet och internationellt tvärtom. Metoden som hon använt var nivågrupperingar men det visade sig

senare att det inte fungerat bra. Hon hade ett förslag att använda eget arbetsmaterial styrd bara av kunskapsmålen. Hon påstår att hon inte har motiverat tillräcklig eleverna och inte förklarat för dem var och varför de ska använda bråkkunskaper vidare i fortsatta studier.

Sammanfattning av Lenas svar

- Svårigheten består av att elever har kunskap om enkla, tydliga bråk från början därför måste hon repetera bråk kunskaper med elever
- För att träna bråktal eleverna behöver olika metoder
- Hon använder enkla didaktiska material
- Hon fokuserar på kunskaper som skall användas i vidare studier
- Hon använder dator som verktyg i undervisningen
- Jämför olika läroplaner och ser fördelar i den nyaste Lgr11
- Hon arbetar ämnesövergripande och använder bråkkunskaper i slöjd också
- Hon använder eget arbetsmaterial som är anknuten till vardagen.

Malin:

Varför är beräkningen med bråk svårt för elever? Har du egna metoder som leder till framgång? Vilka didaktiska aktiviteter använder du? Hur kopplar du bråket med NO-ämnena?

Hon menar att eleverna har bristande kunskaper från mellanstadiet i taluppfattning och bråk. De har svårt att se att en hel är 4/4 delar och har svårt att räkna med bråk. Metoden hon använder att ge exempel från vardagslivet: pizzan ska delas, godiset ska delas, och då ser hon att eleverna har svårighet med division. Vid övergång från ett kapitel till en annan använder hon repetition från föregående kapitel för kunskapen ska vara levande.

Hon föreslår problemlösningssuppgifter från vardagen och från NO-ämnena samt diskuterar med eleverna lösningarna och betygsättningsnivån för uppgifterna. Hon sätter eleverna att arbeta i grupp och fokuserar på att eleverna ska förstå uppgiften. En annan metod är att hon blandar uppgifter från olika kapitel samtidigt och antingen börjar eller slutar lektionen med dessa uppgifter.

Sammanfattning av Malins svar

- Svårigheter består av dem brister som eleverna har från mellanstadiet
- Saknar kunskap för att genomföra operationer med bråk
- Hon använder som metod en övergripande repetition för att hålla kunskap levande
- Hon använder många exempel från vardagen
- Övar elevens problemlösningssförmåga
- Övar eleverna att arbeta i grupp för en bättre förståelse
- Hon använder blandade uppgifter för att träna bråktal i olika former.
- Hon arbetar övergripande och använder bråk i NO-ämnena också.

6.2 Analys

Analysen av transkriberade intervjuerna visade att det finns variation i informanternas bråkundervisning. Efter genomgången av transkripten fördelade jag frågeställningar i de redan nämnda fem kvalitativt olika kategorierna. Dessa kategorier utgår från användandet av olika sammansättningar av intervjufrågorna.

Tabell med lärarnas svar på frågeställningar enligt de fem kategorierna

Kategorier	Anna	Magnus	Fredrik	Lena	Malin
Metoder som lärarna använder i undervisningen	■	■	■	■	■
Hur bygger lärarna begreppsmodeller i bråk	■	■	■	■	
Svårigheter som påverkar framtida studier	■			■	■
Svårigheter i andra grundskoleämne och vardagen	■	■	■		■
Överensstämmelse mellan mina tolkningar och informanternas tolkningar samt forskning i ämnet	■	■	■	■	■

Pionjärerna i matematik didaktik Löwing och Kilborn menar att bråkräkningen anses vara ett svårt stoffområde. Då det, enligt litteraturen, kan finnas vissa svårigheter med att undervisa bråktal vill jag fördjupa mig i detta område genom att se vilka är svårigheterna och vad erfarna pedagoger har för tips och idéer för att bråkundervisningen ska kännas lättare. I analys delen beskriver jag informanternas skilda uppfattningar av olika fenomen i skolan bland annat hur lärare undervisar bråk, hur lärare ställer sig till läromedel och laborativ material, var bråkets användning är i vidare studier eller i vardagen.

Kategori ett:

Anna presenterade lyckade resultat med en ny uppställning av undervisningsveckan med två lektioner där eleverna utför färdighetsräkning och en lektion när de arbetar med problemlösning. Malin menar att hon når goda resultat genom att blanda uppgifter från olika kapitel samtidigt börjar eller slutar matematik lektionerna med dessa uppgifter. Fredrik betonar vikten av färdighetsträning och samtidigt utvecklingen av problemlösningsförmågan. Magnus påstår att genom att konkretisera bråkundervisningen och att bygga upp ett matematiskt språk i klassrummet är elevernas nyckel till byggandet av modellerna. Lena tycker att problemet ligger i att eleverna tror att de förstår begreppet bråk när i själva verket de gör inte det. Hennes metod är att variera bråkundervisningen med ett annat begrepp, procent för att eleverna verkligen skall förstå begreppet det hela. Alla informanter är överens om att elever har svårt att förstå vad helheten är och att en helhet kan se ut på olika sätt.

Kategori två:

Anna påstår att det går att bygga begreppsmodellerna lättare om man blandar olika former av beräkningar: bråk, procent, decimaltal och proportionalitet. Magnus menar att det viktigaste är återkopplingen till den tidigare kunskapen. Fredrik beskriver att modellerna skall byggas genom att lösa problem med text samtidigt eleverna skall hålla på färdighetsträningen. Malin säger att modellerna byggs snabbare om man ständigt återkommer till dem och byggs de vidare. Lena menar att eleverna skall lära sig metoderna utantill för att kunna använda de. Vid undervisning av bråktal menar informanterna att undervisningen måste beröra samtliga "ansikten" av bråktalen för att ge en fullständig förståelse för vad ett bråktal är. Kilborn (1990) resonerar på samma sätt när han redogör för bråkens olika ansikten och menar att den uppfattning läraren ger eleverna av tal i bråkform bör täcka alla aspekter.

Kategori tre:

Malin menar att eleverna har bristande kunskaper från mellanstadienivå. Om i högstadiet lyckas lärarna inte fylla luckorna, eleverna kommer att gå om ett till och med två år på gymnasiet. Lena menar att på mellanstadiet det är inte matematik specialiserade lärare som undervisar och därför har eleverna bristande kunskaper på högstadiet. Hon tycker också att eleverna lär sig bråk på felaktigt sätt på mellanstadiet. Anna menar att om eleverna förstår att det påverkar framtida studier då blir de motiverade och flexibla för att använda olika arbetsformer. Alla informanter var överens om att bråkbegreppen behöver repeteras genom hela högstadiet, så småningom eleverna mognar och slutligen bildar de färdiga begreppsmodellerna. Alla informanter är överens om att bråkbegreppet är viktigt för att det finns i vår vardag och att en förståelse för bråkbegreppet har betydelse för förståelsen av algebra och andra områden inom matematik.

Kategori fyra:

Anna menar att problemet är att vi inte använder bråk i vardagen. Hon ger konkret exempel på användningen av bråk i NO-ämnena och är övertygad att eleverna kan använda symbolerna. Magnus försöker i sin undervisning att bygga modellerna med konkreta vardagsnära objekten. Fredrik i sin bråkundervisning bygger på elevernas förförståelse av bråk och motiverar eleverna att se begreppet det hela när de utför vanliga operationer med bråk. Malin tycker att om eleverna har svårigheter med bråk då kommer de att tycka att fysiken är svårare på grund av de har svårigheterna i beräkningar. De informanter som undervisar i NO-ämnena säger att de ämnen som kräver beräkningar med bråk kommer att uppfattas som svåra på grund av att eleverna inte kan utföra enkla beräkningar (Kilborn, 1990).

Kategori fem:

Den empiriska studiens resultat visar att lärares undervisning berör vissa av bråkbegreppets olika aspekter vilket kan förklaras med att läromedlen påverkar vilka aspekter av bråkbegreppet eleverna får möta. Aspekterna del av helhet, del av antal och bråktal som andel synliggörs i samtliga informanternas undervisning. Resultatet av litteraturstudien visar att om elever skall utveckla en rik förståelse av bråkbegreppet behöver alla aspekter av bråktalen belysas och sättas in i ett sammanhang.

Undervisningen behöver präglas av variation i både arbetssätt och innehåll. Rationella tal i bråkform skapar svårigheter med både uttal och förståelse p.g.a. själva skrivsättet. De rationella talen upplevs ofta komplexa eftersom bråktals storlek och innehåll kan variera beroende på helheten och bråktal kan uttryckas på många sätt. Det är vanligt att elever generaliserar från de räkneregler som gäller för heltalen. Svårigheterna för elever med bråkbegreppet kan bero på undervisningen och elevernas olikheter i mognad och bakgrund. Pedagogerna menar också att man vid introduktionen av bråk bör man införa en dialog, ge tid att tolka symbolerna samt reflektera över bråkbegreppen. Dessutom anser de att det är viktigt att belysa tydligt och ofta olika delar av operation med rationella tal. Enligt forskning är pedagogernas arbetssätt gynnsamma för elevernas inläring av bråk eftersom det leder till att eleverna kan koppla undervisningen till erfarenhet och vardag samt för att öka förståelse för att använda bråk i andra skolämne och i vardagen. Mina tolkningar av bråkbegreppet stämmer överens med pedagogernas tolkning av svårigheterna i bråkundervisningen samt med den aktuella och tidigare forskningen inom matematisk didaktisk ämnesteor.

7. Diskussion och slutsats

I diskussionen sammanfattar jag resultaten från min studie och jämför den med aktuella litteraturen och forskningen. Vidare presenterar jag fortlöpande mina reflektioner och slutsatser.

7.1 Metoddiskussion

Fokus för denna uppsats är matematiklärares åsikter om varför bråk är svårt för elever. Jag har valt att använda mig av intervjuer som huvudsaklig informationskälla och jag har även gjort en kategorisering av frågeställningarna för att få en omfattande bakgrund till det undersökta området. I min studie dominerar den ontologiska synen inom kvalitativa forskningen som visar att resultatet är ett samspel mellan elever och lärare där underlättas bildningen av begreppsmodeller inom bråkundervisningen (Bryman, 2002).

En utförlig bild av upplevelser och erfarenheter när det gäller arbetsmetoder i bråkundervisningen fick jag av de fem erfarna pedagoger. Studien genomfördes i en liten skala vilket medför att resultatet inte nödvändigtvis är representativt för undervisningen i Sverige generellt sätt.

7.2 Resultatdiskussion

Syftet med uppsatsen var att utifrån ett didaktiskt perspektiv studera hur fem pedagoger bedriver sin bråkundervisning.

Resultatet visar att pedagogerna undervisar med konkret material, laborativt, vardagsförankrat, med bilder samt genom att samtala och diskutera matematik. Bilden kan vara till hjälp för eleverna när de skall översätta mellan det vardagliga språket och det formella symbolspråket. Piaget förordar ett laborativt arbetssätt. Han menar att lärande och kunskap uppstår när en elev får tillfälle att känna på saker, ordna objekt och uppleva dem (Lindqvist, 1999).

Kilborn (1990) menar också att laborativt arbete kan vara bra eftersom eleverna tycker det är roligt och därför kan koncentrera sig bättre. Lärarna vill även att eleverna ska tycka att matematiken är rolig och för att skapa intresse så försöker de hitta lustfyllda moment som spel och liknande övningar. De är alla eniga om att bråkkunskaper är viktiga för framtida studier.

De fem pedagogerna är överens om att elever har svårt att förstå begreppet bråk. Svårigheten består i att överföra enkla vardagliga bråk till symboler. Det behövs en abstraktion process vilket eleverna har svårt att genomföra. De fyra räknesätten anser samtliga intervjuade lärare vara viktig att kunna. En av lärarna anser att om man använder varierade arbetssätt och arbetsformer finns det större möjlighet att nå eleverna.

Pedagogerna menar att undervisningen måste beröra samtliga "ansikten" av bråktalen för att få en fullständig förståelse för vad ett bråktal är. Kilborn (1990) resonerar på samma sätt när han redogör bråkens olika ansikten och menar att den uppfattning läraren ger eleverna av tal i bråkform bör täcka alla aspekter. Lärarna påpekade hur viktigt det är att bråktalet sätts in i ett sammanhang när den är kopplad till vardagssituationen. Kilborn (1990) menar också att bråkbereäkningar är en förutsättning för andra moment inom matematiken i synnerhet algebra och funktioner.

Eftersom jag själv undervisar både i matematik och de naturvetenskapliga ämnena har erfarenhet av hur man planerar, genomför och utvärderar ett ämne det vill säga, har en bredd didaktisk erfarenhet.

7.3 Slutsats och fortsatt forskning

I mitt examensarbete har följande frågor varit centrala:

Varför är beräkningen med bråk är svårt för elever på högstadiet, var ligger problemet när begreppsmodellerna bildas, hur påverkar andra grundskoleämnena, hur påverkar vidare studier samt hur påverkar svårigheterna att räkna med bråk vardagen för elever som inte går vidare med sina studier.

Syftet var att ta reda på varför bråkräkningen är svårt för elever på högstadiet samtidigt som jag fick reda på hur fem erfarna pedagoger undervisar och vilka metoder, arbetssätt och arbetsformer använder. Slutsatsen är att jag som pedagog bör utgå från elevernas vardag och erfarenhet, att eleverna bör ges tillfälle att prata och diskutera matematik tillsammans med varandra, de ska arbeta laborativt, samt att de skall använda sig av elektroniska hjälpmedel i bråkundervisningen. Förutom att ta utgångspunkt i elevernas förförståelse måste vi matematiklärare ha goda kunskaper om bråk och fördelar och nackdelar i användningen av olika begreppsmodeller för bråk (Skolverket 2011). Det är viktigt att läraren inte enbart använder sig av en begreppsmodell utan varierar dessa modeller.

Enligt Löwing (2008) är lärarens egen kunskap i området som ska behandlas viktigt samt matematikämnet didaktik i det område. McIntosh (2008) menar att bråk bör introduceras laborativt, i aktiviteter där man samtalar kring vad som händer. Genom att arbeta laborativt får eleverna möjlighet att bygga upp inre föreställningar för att med tiden introduceras hur bråk kan uttryckas med skrivna symboler. Sambanden mellan det laborativa, det muntliga och det skriftliga måste göras tydligt. Enligt Löwing (2008) behöver eleverna lära sig de mest grundläggande begreppen inom bråk innan de går vidare till addition och subtraktion, så att inte fler missuppfattningar uppstår. Dessa grundläggande begrepp är att förstå täljarens innebörd, nämnarens innebörd, att alla bråkdelar måste vara lika stora samt att varje tal i bråkform kan skrivas på olika sätt.

Jag har nått syftet med studien. Undersökningen visar att en bra utgångspunkt är att eleverna ska lära sig bilda begreppsmodeller så tidigt som möjligt. Lärarna ska visa för elever var svårigheterna uppstår och hur ska man arbeta med dem. Lärarna ska också medvetengöra eleverna för användningen av bråkbegreppet i framtida studier och visa hur de ska omsätta kunskaperna i praktiken. ska använda en variation av metoder för utvecklingen av elevernas problemlösningsförmåga. Den sista lösningen skulle vara obligatoriska introduktionen av en ämnesövergripande undervisning. I praktiken en genomförande skulle leda till att eleverna tydligare kopplar matematiken och vardagen.

Fortsatt forskning

Jag föreslår en fortsatt forskning kring återinförande av bevis och vetenskaplig tänkande i bråkundervisningen på högstadiet. Anledningen till detta är att bevisföringen inom matematikens olika områden är baserad på logiska resonemang snarare än empiriska undersökningar. Det skulle hjälpa eleverna i bildandet av begreppsmodeller. Jag föreslår också att läromedelsförfattarna tillsammans med lärarna ska sträva efter införandet av bevis och praktiska tillämpningar i läromedlen så att eleverna ska se sambandet mellan olika bevis och begreppsmodeller. Vidare rekommenderar jag att forskningen ska fokusera på följande fråga: sker det en progression i förståelsen av bråkbegreppet mellan årskurs 7 och årskurs 9? Om inte ska man undersöka vad är orsaken till detta.

Referenslista

- Ahlberg, A. (1995). *Barn och matematik*. Lund: Studentlitteratur.
- Berglund, L. (2009). *Tal och mönster*. Lund: Studentlitteratur.
- Bryman, A. (2002). *Samhällsvetenskapliga metoder*. Malmö: Liber AB.
- Carlgren, I., & Marton, F. (2000). *Lärare av i morgon*. Stockholm: Lärarförbundets förlag.
- Denscombe, M. (2009). *Forskningshandboken – för småskaliga forskningsprojekt inom samhällsvetenskaperna*. Lund: Studentlitteratur.
- Engström, A. (1998). *Matematik på elevens villkor*. Lund: Studentlitteratur.
- Johansson, B., & Killborn, W. (1986). *Om matematikämnets innehåll och didaktik Fackdidaktik Vol. III*. Lund: Studentlitteratur.
- Kilborn, W. (2014). Om tal i bråk- och decimalform – en röd tråd. *Göteborg: Nationellt Centrum för Matematikutbildning (NCM Nämnaren)*. maj, s. 32-34.
- Kilborn, W. (1990). *Didaktisk ämnesteor i matematik. Del 2. Rationella tal och irrationella tal*. (kapitel 10). Malmö: Liber Hermods
- Lindqvist, G. (1999). *Vygotskij och skolan*. Lund: Studentlitteratur.
- Löwing, M., & Kilborn, W. (2002). *Baskunskaper i matematik- för skola, hem och samhälle*. Lund: Studentlitteratur.
- Löwing, M. (2008). *Grundläggande aritmetik: matematikdidaktik för lärare*. Lund: Studentlitteratur.
- Löwing, M. (2011). *Matematikundervisningens dilemman. Hur lärare kan hantera lärandets komplexitet*, Lund: Studentlitteratur.
- Löwing, M., & Kilborn, W. (2011). *Språk, kultur och matematikundervisning*. Lund: Studentlitteratur
- McIntosh, A. (2008). Förstå och använda tal – en handbok. *Göteborg: Nationellt Centrum för Matematikutbildning (NCM Nämnaren)*, s. 1-41
- Marton, F., & Booth, S. (2000). *Om lärande*. Lund: Studentlitteratur
- Runesson, U. (2000). Variation för lärande, *Göteborg: Nationellt Centrum för Matematikutbildning (NCM Nämnaren)*, s. 19-25

Runesson, U., & Kullberg (i tryck). Learning from variation. Differences in learners' ways of experiencing differences. Sriraman, B., Bergsten, C., Goodchild, S., Michelsen, C., Palsdottir, G., Steinthorsdottir, O., Haapasalo, L., *The Sourcebook on Nordic Research in Mathematics Education*.

Skolverket. (2011). Läroplan för grundskolan 2011. Tillgänglig:

<http://www.skolverket.se/publikationer>

Säljö, R. (2005). *Lärande - en introduktion till perspektiv och metaforer*, Malmö: Gleerups

Säljö, R. (2014). *Lärande och kulturella redskap i vår vardag*. Lund: Studentlitteratur

Höjman, P. (2009). Att sätta lärares och elevers lärande i fokus. *Göteborg: Nationellt Centrum för Matematikutbildning (NCM Nämnaren nr. 1)*. Hämtad från <http://ncm.gu.se/node/3336>

Nationalencyklopedin [NE], (2015). *Bråkform*. Tillgänglig: [http://www.ne.se/uppslagsverk/encyklopedi/enkel/bråkform](http://www.ne.se/uppslagsverk/encyklopedi/enkel/brakform)

Löwing, M. (2002). *Ämnesdidaktisk teori för matematik undervisning- ämneskunskapers relation till individ och omvärlden*. (Forskarrapport nr.11). Göteborgs Universitet.

Runesson, U. (1999). *Variationens pedagogik. Skilda sätt att behandla ett matematiskt innehåll*. (Doktorsavhandling). Göteborgs Universitet.

Brunosson, A. (2010). *Kökets bråkstakar. Elevers förståelse för bråktal i hem och konsumentkunskap* (Kandidatuppsats). Högskolan Kristianstad. Tillgänglig: <https://www.diva-portal.org/smash/get/diva2:395371/FULLTEXT01.pdf>

Moen, A. (2014). *Hur mycket är en del?* (Kandidatuppsats). Umeå: Institutionen för kostvetenskap, Umeå universitet. Tillgänglig: [http://allauppsatser.se/uppsats/Hur mycket ar en del. En uppsats om elevers praktiska tillampningar av matematik i amnet hem- och konsumentkunskap/49498/](http://allauppsatser.se/uppsats/Hur_m mycket_ar_en_del.En_uppsats_om_elevers_praktiska_tillampningar_av_matematik_i_amnet_hem_och_konsumentkunskap/49498/)

Hallström, C. (2005). *Bråkbegreppet* (Kandidatuppsats). Linköping: Matematiska Institutionen, Linköpings universitet. Tillgänglig: <http://www.diva-portal.org/smash/get/diva2:19442/FULLTEXT01.pdf>

Petterson, E. (2015). *Bland decimaltecken och bråktecken* (Kandidatuppsats). Växjö: Institution för matematikdidaktik, Linnéuniversitetet. Tillgänglig: <http://www.diva-portal.org/smash/get/diva2:817210/FULLTEXT01.pdf>

Gustavsson, I. (2006). *Matematik och musik. En studie om elevers uppfattningar om musik i matematikundervisningen* (Kandidatuppsats). Växjö: Institution för pedagogik, Växjö universitet. Tillgänglig: <http://www.diva-portal.org/smash/get/diva2:205033/FULLTEXT01.pdf>

Bilaga1 Intervjuguide

- Vilka erfarenheter har du angående bråkundervisning på högstadiet?
- Vad ser du för orsaker till att elever har svårigheter att utföra beräkningar med bråk?
- Har du egna metoder som leder till framgång när du fick väldigt goda studieresultat?
- Vilka didaktiska aktiviteter använder ni i undervisningen av bråk som har anslutning till vardagsnära situationer?
- Kan bråkräkningen underlätta förståelsen för NO ämnena?
- När är det rätta tidpunkten på högstadiet för att visa för elever sambandet mellan bråk, decimal och procentform?

Forskningsfråga:

- Skall vi pedagoger återinföra bevis och vetenskaplig tänkande på högstadiet, för begreppet bråk?